

Q1 $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+y-4z=a \\ x-z=2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & a \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & a \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{l_2 - l_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a-4 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a-4 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{l_3 + l_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & a-4-\frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = a - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Q2 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(T) \leq 3$ donc T pas surjective (car $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$)

Puis $2c_1 + 3c_2 = c_3$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(T)$ so T pas injective

Q3 $T: P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ def. por $T(p) = \begin{pmatrix} p^{(0)} & p^{(1)} \\ p^{(-1)} & p^{(0)} \end{pmatrix}$

$\beta = (\underbrace{1}_{b_1}, \underbrace{t+t^2}_{b_2}, \underbrace{t-t^2}_{b_3})$ $\mathcal{C} = (\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{c_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{c_4})$

$$A = [T]_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \left([T(1)]_{\mathcal{C}} \mid [T(t+t^2)]_{\mathcal{C}} \mid [T(t-t^2)]_{\mathcal{C}} \right)_{4 \times 3}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e$$

$$T(b_2) = T(t + t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_3 + c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$$

$$T(b_3) = T(t-t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = c_4 - c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q4 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ & pour quel(s) $t \in \mathbb{R}$ lin. dépendants?

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ -2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 0 & -1 & -5+2t \\ 0 & 7 & 8-3t \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3+7L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 0 & -1 & -5+2t \\ 0 & 0 & -55+11t \end{pmatrix}$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. indep. $\Leftrightarrow -55+11t \neq 0$

lin. dép $\Leftrightarrow -55+11t = 0 \Leftrightarrow t = 5$

Q5 $B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right)$ $\mathcal{C} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{c_3} \right)$

soit $P = P_{\mathcal{C}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} | [b_2]_{\mathcal{C}} | [b_3]_{\mathcal{C}})$, on cherche la 3^{ème} colonne de P

il suffit donc de calculer $[b_3]_{\mathcal{C}}$. cherchons à écrire $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

comme C.L. des vect. c_1, c_2, c_3 : $b_3 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$

matrice augmentée: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow b_3 = (-1)c_1 + (-1)c_2 + 0 \cdot c_3$
 ainsi $[b_3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Q6 $B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d+2a & 3e+6b & f+2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-2L_1} \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & k \end{pmatrix} = B'$

on a $\det(B) = \det(B') = 3 \det(A) = 3$.

Q7 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
 $R_{14} = -4$ R

$$Q8: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(VRAI/FAUX)

Q9 **Faux**. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (inversibles)
avec $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non inversible

Q10 **Vrai** soit $T: V \rightarrow W$ linéaire et notons $d = \dim(\text{Im}(T)) = \text{rg}(T)$
Puisque $\text{Im}(T)$ est un sous-espace de W on a $d = \dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$
et Par le théorème du Rang $\underbrace{\dim(\text{Ker}(T))}_{\geq 0} + \underbrace{\dim(\text{Im}(T))}_d = \dim(V)$ donc $d \leq \dim(V)$.

Q11 **Vrai** soit $W = \{p \in P_n \mid p(-t) = -p(t) \forall t \in \mathbb{R}\}$. W est un sous-espace vectoriel de P_n
en effet: $0 \in W$ car $0(-t) = 0 = -0(t) \forall t \in \mathbb{R}$
si $p, q \in W$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda p + \mu q \in W$ car $\forall t \in \mathbb{R}$ on a
 $(\lambda p + \mu q)(-t) = \lambda p(-t) + \mu q(-t) = \lambda(-p(t)) + \mu(-q(t)) = -(\lambda p(t) + \mu q(t)) = -(\lambda p + \mu q)(t)$
 $\uparrow$
 $p, q \in W$

Q12 **Faux** En effet, prenons $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. $n=2$
Alors tout sous-famille de $\mathcal{F}$ formée de $n-1=1$ vecteurs est linéairement indép. mais $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$

Q13 **Vrai** soit $A = (a_1 | \dots | a_n)_{m \times n}$ telle que $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ soit une base de $\mathbb{R}^m$
alors $n=m$ (car $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ et toutes les bases ont même nombre de vecteurs)
et pour tout $b \in \mathbb{R}^m$ il existe un unique $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ t.q. $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$
Donc $A\lambda = b$ (car B est une base)

Q14 **Vrai** Soit $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, elle définit une transformation linéaire $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto Ax$
 et $A^T \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, " " " $T_{A^T}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $x \mapsto A^T x$

le théorème du rang pour A dit: $\dim(\text{Ker} A) + \dim(\text{Im} A) = n$ ← n = dim. de l'espace de départ
 " " " pour A^T dit: $\dim(\text{Ker} A^T) + \dim(\text{Im} A^T) = m$ ✓
 en sommant on trouve l'égalité voulue.

Q15 **Faux** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = 2$
 mais $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la forme échelonnée réduite de A , vérifie $\det(R) = 1$.

Q16 **Vrai** $W = \{A \in M_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ ss-espace de $M_{\mathbb{R}^2}$

en effet $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

si $A, B \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda A + \mu B$
 donc $\dim(W) \leq \dim(M_{\mathbb{R}^2}) = 4$ et $W \neq M_{\mathbb{R}^2}$ donc $\dim W < 4$. $A, B \in W$

Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ est une base de W

En effet, soit $A \in W$. On a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ (car $A = A^T$)

donc $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est comb. lin. des A_i

De plus $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc B est une base de W et $\dim W = 3$.